V-8 (59 min) 1-Marzo-2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Cálculo de valor esperado $\langle\phi_a\phi_b\rangle$ (2ª parte)**

Funcional Generador en campo de puntos discretos con valores ϕ_i libre de interacciones

En (I) del resumen de V-4, para campo de único punto de valor ϕ, definimos: $Z[J] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-S(\phi)+\phi\cdot J}\, d\phi$

En (I) de resumen de V-6 vimos que en campo de "n" puntos discretos: $S(\phi_j) = \frac{m^2}{2}(\phi)^T(A)(\phi)$

En campo de "n" puntos discretos, **Z[*J*]** representa una función de "n" valores ***J***, de forma que en el exponente para calcular **Z[*J₁*, *J₂*, … *Jₙ*]** se pone el producto $\phi\cdot J$ como producto de matrices: $(\phi)^T(J) = \sum_i \phi_i J_i$

Ahora, el funcional generador se define: $$Z[J] = \int\cdot\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} exp\left[-\frac{m^2}{2}(\phi)^T(A)(\phi) + (\phi)^T(J)\right]\mathcal{D}\,\phi \qquad \text{(I)}$$

Vamos a resolver esa integral reduciéndola a integrales gaussianas, para ello hacemos el mismo cambio de variables, que ya vimos en videos 6 y 7, regido por la matriz (V) de vectores propios:

$$(\phi) = (V)\cdot(\psi) \implies \begin{pmatrix}\phi_1\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_{11} & \cdots & v_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ v_{n1} & \cdots & v_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix} \Rightarrow \phi_a = v_{a1}\psi_1 + v_{a2}\psi_2 + \cdots + v_{an}\psi_n = \sum_j v_{aj}\psi_j$$

1ª parte de exp: en (II) de resumen de V-6: $S(\psi_j) = \frac{m^2}{2}(\phi)^T(A)(\phi) = \frac{m^2}{2}\cdot(\psi)^T(D)(\psi) = \frac{m^2}{2}\sum_j \lambda_j\psi_j^2$

2ª parte de la exponencial se transforma: $(\phi)^T(J) = \sum_i \phi_i J_i = [(V)(\psi)]^T\cdot(J) = (\psi)^T(V)^T(J) =$

$$= (\psi_1 \ldots \psi_n)\begin{pmatrix}v_{11} & \cdots & v_{n1}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ v_{1n} & \cdots & v_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J_1\\ \vdots\\ J_n\end{pmatrix} = (v_{11}J_1 + \cdots + v_{n1}J_n)\,\psi_1 + \cdots + (v_{1n}J_1 + \cdots + v_{nn}J_n)\,\psi_n = X_1\psi_1 + \cdots + X_1\psi_1$$

Para escribir menos hemos llamado: $(X) = (V)^T(J) \rightarrow X_a = \sum_i v_{ia}J_i$ y 2º parte queda: $(\phi)^T(J) = \sum_j X_j\,\psi_j$

$$Z[J] = \iint_{-\infty}^{+\infty} exp\left[-\frac{m^2}{2}\sum_j \lambda_j\psi_j^2 + \sum_j X_j\,\psi_j\right]\mathcal{D}\psi \quad = \quad \iint_{-\infty}^{+\infty} exp\left[-\frac{m^2}{2}\sum \lambda_j\left(\psi_j^2 - 2\frac{X_j}{m^2\lambda_j}\,\psi_j\right)\right]\mathcal{D}\psi$$

$(a^2 - 2ab) = (a-b)^2 - b^2 \longrightarrow$ llamando $a = \psi_j$ y $b = \frac{X_j}{m^2\lambda_j}$ se cambia cada sumando, y opera el exponente:

$$-\frac{m^2}{2}\sum \lambda_j\left(\psi_j^2 - 2\frac{X_j}{m^2\lambda_j}\,\psi_j\right) = -\frac{m^2}{2}\sum\left[\lambda_j\left(\psi_j - \frac{X_j}{m^2\lambda_j}\right)^2 - \frac{X_j^2}{m^4\lambda_j}\right] = \sum_j\left[-\frac{m^2}{2}\lambda_j\left(\psi_j - \frac{X_j}{m^2\lambda_j}\right)^2 + \frac{X_j^2}{2m^2\lambda_j}\right]$$

Exponencial se pone como producto: $Z[J] = exp\left(\sum_j \frac{X_j^2}{2m^2\lambda_j}\right)\iint_{-\infty}^{+\infty} exp\left[\sum_j -\frac{m^2\lambda_j}{2}\left(\psi_j - \frac{X_j}{m^2\lambda_j}\right)^2\right]\mathcal{D}\psi$

Dentro de cada sumando se cambia: $\left(\psi_j - \frac{X_j}{m^2\lambda_j}\right) = y_j \rightarrow d\psi_j = dy_j$ y la integral se convierte en producto de integrales gaussianas vistas en (I) de resumen de V-3:

$$Z[J] = exp\left(\sum_j \frac{X_j^2}{2m^2\lambda_j}\right)\prod_j\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{m^2\lambda_j}{2}y_j^2\right)dy_j = exp\left(\sum_j \frac{X_j^2}{2m^2\lambda_j}\right)\prod_j \frac{\sqrt{2\pi}}{m\sqrt{\lambda_j}}$$

Teniendo en cuenta que $\prod_j \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1.\lambda_2\cdots\lambda_n}} = \frac{1}{\sqrt{\det(D)}} = \frac{1}{\sqrt{\det(A)}}$ y $\prod_j^n\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{m}\right) = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{m}\right)^n$ nos queda:

$$Z[J] = \frac{(\sqrt{2\pi})^n}{m^n\sqrt{\det(A)}}exp\left[\frac{1}{2m^2}\sum_j \frac{1}{\lambda_j}X_j^2\right] \xrightarrow{suma\ forma\ matricial} = \frac{(\sqrt{2\pi})^n}{m^n\sqrt{\det(A)}}\,exp\left[\frac{1}{2m^2}(X)^T(D)^{-1}(X)\right]$$

Deshacemos lo que hicimos para abreviar: $(X) = (V)^T(J) \implies (X)^T(D)^{-1}(X) = (J)^T(V)\ (D)^{-1}(V)^T(J)$

Según (III) de resumen de V-2: $(V)\,(D)^{-1}(V)^T = (A)^{-1} \implies (X)^T(D)^{-1}(X) = (J)^T(A)^{-1}(J)$

El producto de matrices, al que hemos llegado, se puede comprobar que es equivalente a: $\sum_{ij} A_{ij}^{-1}J_iJ_j$

Por lo tanto, el funcional generador es:

A_{ij}^{-1} es el elemento *ij* de matriz inversa de (A)

$$Z[J] = \frac{(\sqrt{2\pi})^n}{m^n\sqrt{\det(A)}}\cdot exp\left[\frac{1}{2m^2}\sum_{ij} A_{ij}^{-1}J_iJ_j\right] \qquad \text{(II)}$$

Cálculo del valor esperado $\langle \phi_a \phi_b \rangle$ utilizando el funcional generador

En (V) del resumen de V-4 para campo de único punto de valor ϕ vimos: $\langle \phi^p \rangle = \frac{Z^{(p^a)}[0]}{Z[0]}$

En un campo de "*n*" puntos discretos generalizamos el cálculo del valor esperado de un producto de **"*p*"** (par) valores:

$$\langle \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d \cdot\cdot \phi_p \rangle = \frac{\left[\left(\frac{\partial}{\partial J_a}\frac{\partial}{\partial J_b}\frac{\partial}{\partial J_c}\frac{\partial}{\partial J_d}\cdots\frac{\partial}{\partial J_p}\right) Z(J_i)\right]_0}{Z[0]} \qquad \textbf{(III)}$$

En el caso de dos valores, queda: $\langle \phi_a \phi_b \rangle = \frac{\left[\left(\frac{\partial}{\partial J_a}\frac{\partial}{\partial J_b}\right) Z(J)\right]_0}{Z[0]}$

Numerador: $\left[\left(\frac{\partial}{\partial J_a}\frac{\partial}{\partial J_b}\right) Z(J)\right]_0 = \frac{(\sqrt{2\pi})^n}{m^n\sqrt{\det(A)}}\left[\frac{\partial}{\partial J_a}\frac{\partial}{\partial J_b} exp\left(\frac{1}{2m^2}\sum_{ij} A_{ij}^{-1} J_i J_j\right)\right]_0$

Denominador: $Z[0] = \frac{(\sqrt{2\pi})^n}{m^n\sqrt{\det(A)}} \cdot exp\left[\frac{1}{2m^2}\sum_{ij} A_{ij}^{-1} J_i J_j\right]_0 = \frac{(\sqrt{2\pi})^n}{m^n\sqrt{\det(A)}}$

Al dividir numerador entre denominador y simplificar:

$$\langle \phi_a \phi_b \rangle = \left[\frac{\partial}{\partial J_a}\frac{\partial}{\partial J_b} exp\left(\frac{1}{2m^2}\sum_{ij} A_{ij}^{-1} J_i J_j\right)\right]_{\textit{evaluado con todas las } J=0}$$

Para abreviar llamamos $M_{ij} = \frac{A_{ij}^{-1}}{2m^2}$ y ponemos: $\langle \phi_a \phi_b \rangle = \left[\frac{\partial}{\partial J_a}\frac{\partial}{\partial J_b} exp \sum_{ij} M_{ij} J_i J_j\right]_0$

1ª derivación: $\frac{\partial}{\partial J_b} exp \sum_{ij} M_{ij} J_i J_j = \left(exp \sum_{ij} M_{ij} J_i J_j\right) \frac{\partial}{\partial J_b}\left(\sum_{ij} M_{ij} J_i J_j\right) =$

$$= \left(exp \sum_{ij} M_{ij} J_i J_j\right)\left(\sum_{ij} M_{ij} J_i \frac{\partial J_j}{\partial J_b} + \sum_{ij} M_{ij} J_j \frac{\partial J_i}{\partial J_b}\right) = \left(exp \sum_{ij} M_{ij} J_i J_j\right)\left(\sum_{ij} M_{ij} J_i\, \delta_{jb} + \sum_{ij} M_{ij} J_j\, \delta_{ib}\right) =$$

$$= \left(exp \sum_{ij} M_{ij} J_i J_j\right)\left(\sum_{i} M_{ib} J_i + \sum_{j} M_{bj} J_j\right)$$

2ª derivación: $\frac{\partial}{\partial J_a}\left[\left(exp \sum_{ij} M_{ij} J_i J_j\right)\left(\sum_i M_{ib} J_i + \sum_j M_{bj} J_j\right)\right] =$

$$= \left(\sum_{i} M_{ib} J_i + \sum_{j} M_{bj} J_j\right) \cdot \frac{\partial}{\partial J_a}\left(exp \sum_{ij} M_{ij} J_i J_j\right) + \left(exp \sum_{ij} M_{ij} J_i J_j\right) \cdot \frac{\partial}{\partial J_a}\left(\sum_{i} M_{ib} J_i + \sum_{j} M_{bj} J_j\right)$$

Como no hacemos más derivadas y hay que evaluar el resultado para todas las $J = 0$, el primer factor del primer sumando se anula, mientras que el primer factor del segundo sumando se hace la unidad. En definitiva nos queda:

$$\langle \phi_a \phi_b \rangle = \frac{\partial}{\partial J_a}\left(\sum_{i} M_{ib} J_i + \sum_{j} M_{bj} J_j\right) = \sum_{i} M_{ib} \frac{\partial J_i}{\partial J_a} + \sum_{j} M_{bj} \frac{\partial J_j}{\partial J_a} = \sum_{i} M_{ib} \delta_{ia} + \sum_{j} M_{bj} \delta_{ja} = M_{ab} + M_{ba}$$

Volvemos a expresar $M_{ab} = \frac{A_{ab}^{-1}}{2m^2}$ y $M_{ba} = \frac{A_{ba}^{-1}}{2m^2}$ $\rightarrow$ $\langle \phi_a \phi_b \rangle = \frac{A_{ab}^{-1}}{2m^2} + \frac{A_{ba}^{-1}}{2m^2}$

Al ser simétrica la matriz (A) y su inversa $(A)^{-1}$, nos queda: $\langle \phi_a \phi_b \rangle = \frac{1}{m^2} A_{ab}^{-1}$ **(IV)**

Vemos que hemos obtenido exactamente el mismo resultado para $\langle \phi_a \phi_b \rangle$ utilizando el funcional generador **Z[*J*]**, que haciendo un cálculo directo sin utilizarlo: expresión (IV) de resumen del V-7

EJERCICIO PROPUESTO: Calcular $\langle \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d \rangle$